На правах рукописи

Дж. К. Т.

Аль Исави Джавад Кадим Тахир

ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОГО КЛАССА ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ В КВАЗИСОБОЛЕВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

ВОРОНЕЖ – 2016

Работа выполнена в Южно-Уральском государственном университете (национальный исследовательский университет).

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук,
доцент Замышляева Алёна Александровна.

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук,
профессор Пятков Сергей Григорьевич,
Югорский государственный университет,
кафедра высшей математики, заведующий;

кандидат физико-математических наук,
доцент Турбин Михаил Вячеславович,
Воронежский государственный университет,
научно-исследовательский институт математики,
ведущий научный сотрудник.

Ведущая организация:

Новгородский государственный университет
имени Ярослава Мудрого.

Защита состоится 14 июня 2016 года в 16 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д 212.038.22 при Воронежском государственном университете, по адресу: 394006, г. Воронеж, Университетская пл., 1, ауд. 335

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Воронежского государственного университета, а также на сайте
http://www.science.vsu.ru/disserinfo&cand=2872

Автореферат разослан «   » марта 2016 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор физ.-мат. наук, профессор   Ю.Е. Гликлих

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Постановка задачи. Пусть $\mathfrak{U}$ – некоторое вещественное линейное пространство. Назовем упорядоченную пару $(\mathfrak{U};\ {}_{\mathfrak{U}}\|\cdot\|)$ *квазинормированным пространством*, если

(i) $\forall u \in \mathfrak{U}\ {}_{\mathfrak{U}}\|u\| \geq 0$, причем ${}_{\mathfrak{U}}\|u\| = 0 \ \Leftrightarrow\ u = \mathbf{0}$, где $\mathbf{0} \in \mathfrak{U}$;

(ii) $\forall u \in \mathfrak{U}\ \forall \alpha \in \mathbb{R}\ {}_{\mathfrak{U}}\|\alpha u\| = |\alpha|_{\mathfrak{U}}\|u\|$;

(iii) $\forall u, v \in \mathfrak{U}\ \ {}_{\mathfrak{U}}\|u+v\| \leq C({}_{\mathfrak{U}}\|u\| +\ {}_{\mathfrak{U}}\|v\|)$, где константа $C \geq 1$ и не зависит от u и v.

Функция ${}_{\mathfrak{U}}\|\cdot\| : \mathfrak{U} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ называется *квазинормой*, причем в случае $C = 1$ она является также и нормой. Таким образом, понятия квазинормированного пространства является обобщением понятия нормированного пространства. В дальнейшем квазинормированное пространство $(\mathfrak{U};\ {}_{\mathfrak{U}}\|\cdot\|)$ будем отождествлять с пространством $\mathfrak{U}$. Известно, что квазинормированные пространства метризуемы, и, следовательно, можно ввести понятие *фундаментальной последовательности.* Полное квазинормированное пространство называется *квазибанаховым.* Наиболее распространенным примером квазибанаховых пространств служат пространства последовательностей ℓ_q и построенные на их основе квазисоболевы пространства ℓ_q^m, $0 < q < 1$, $m \in \mathbb{R}$ $\ q \in \mathbb{R}_+$. Отметим, что при $q \in [1, +\infty)$ эти пространства банаховы, а при $q \in (0, 1)$ – квазибанаховы, во втором случае $C = 2^{\frac{1-q}{q}}$.

Пусть $Q_n(\lambda) = \sum\limits_{i=0}^{n} c_i \lambda^i$ и $R_s(\lambda) = \sum_{j=0}^{s} d_j \lambda^j$ – многочлены с действительными коэффициентами степеней n и s, соответственно, причем $n < s$ и $d_s c_n < 0$, не имеющие общих корней. Рассмотрим операторы $Q_n(\Lambda)u = \{Q_n(\lambda_k)u_k\}$, где $\{u_k\} \in \ell_q^{m+2n}$ и $R_s(\Lambda)u = \{R_s(\lambda_k)u_k\}$ $n \in \mathbb{N}$, где $\{u_k\} \in \ell_q^{m+2s}$, а монотонная последовательность $\{\lambda_k\} \subset \mathbb{R}_+$ такова, что $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k = +\infty$. Как нетрудно видеть, оператор $Q_n(\Lambda) \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$, а оператор $R_s(\Lambda) \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$, $\mathrm{dom} R_s(\Lambda) = \ell_q^{m+2s}$. Здесь $\mathfrak{U} = \ell_q^{m+2n}, \mathfrak{F} = \ell_q^m$, $m \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}_+$.

Рассмотрим класс эволюционных уравнений

$$Q_n(\Lambda)\dot{u} = R_s(\Lambda)u \tag{1}$$

в квазисоболевых пространствах последовательностей. Положив $L = Q_n(\Lambda)$, $M = R_s(\Lambda)$, будем рассматривать уравнение (1) в рамках абстрактного уравнения соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu. \tag{2}$$

Вектор-функцию $u \in C^1(\mathbb{R}_+;\mathfrak{U})$ будем называть решением уравнения (2), если при подстановке она обращает его в тождество. Решение $u = u(t)$ такого уравнения назовем решением задачи Коши

$$u(0) = u_0, \tag{3}$$

если оно вдобавок удовлетворяет условию Коши (3) при некотором $u_0 \in \mathfrak{U}$.

Известно, что при произвольных начальных данных задача (3) для уравнения (2) неразрешима, что приводит к значительным трудностям в решении практических задач. Поэтому важной является постановка задачи Шоуолтера–Сидорова

$$P(u(0) - u_0) = 0, \tag{4}$$

где P – проектор на образ разрешающей (полу)группы операторов уравнения (2). Отметим, что задача Шоуолтера–Сидорова в невырожденном случае совпадает с задачей Коши, а в вырожденном – может быть решена при произвольных начальных данных.

Помимо однородного уравнения целесообразно исследование разрешимости начальных задач (3) и (4) для неоднородного уравнения вида

$$L\dot{u} = Mu + g, \tag{5}$$

где $g : [0,T] \to \mathfrak{F}$ – заданная функция.

Целью работы является исследование разрешимости одного класса эволюционных уравнений соболевского типа в квазибанаховых пространствах последовательностей с изучением свойств полученных решений.

Для достижения цели необходимо решить следующие задачи:

1. Исследовать относительно секториальные операторы в квазибанаховых пространствах последовательностей с получением результатов об их свойствах;

2. Обобщить результаты теории вырожденных голоморфных полугрупп в квазибанаховы пространства последовательностей;

3. Исследовать разрешимость задачи Коши, задачи Шоуолтера–Сидорова для одного класса уравнений соболевского типа с использованием теории вырожденных голоморфных полугрупп в квазибанаховых пространствах последовательностей;

4. Построить инвариантные пространства и исследовать экспоненциальные дихотомии решений рассматриваемого класса уравнений;

5. Исследовать уравнение Дзекцера в квазибанаховых пространствах последовательностей с изучением свойств его решений.

Актуальность темы. Впервые уравнения, неразрешенные относительно производной, начал рассматривать, по-видимому, А. Пуанкаре. Систематическое же их изучение началось в 20 веке с основополагающих работ С.Л. Соболева. Именно поэтому в современных математических исследованиях в отношении уравнений неразрешенных относительно производной прочно закрепился термин "уравнения соболевского типа". Заметим, что уравнения соболевского типа называются динамическими, если их решения продолжимы на всю ось $\mathbb{R}$, и эволюционными, если их решения существуют только на полуоси $\mathbb{R}_+$.

Исследования уравнений, неразрешенных относительно производной, неразрывно связаны с развитием теории вырожденных голоморфных (полу)групп операторов. В настоящее время уравнения соболевского типа и связанные с ними вырожденные (полу)группы операторов активно изучаются области неклассических уравнений математической физики. В последние десятилетия написано большое количество монографий полностью или частично посвященных этой тематике, сформировались научные направления, вокруг которых сложились научные школы. В этой области активно работают Р.Е. Шоуолтер (R.E. Showalter), А. Фавини (A. Favini), А. Яги (A. Yagi), И.В. Мельникова, С.Г. Пятков, Г.В. Демиденко, Н.А. Сидоров, М.В. Фалалеев, Г.А. Свиридюк, Т.Г. Сукачева, В.Е. Федоров и др.

Линейные уравнения соболевского типа и разрешающие их вырожденные (полу)группы операторов на основе относительно спектральной теории впервые были изучены Г.А. Свиридюком и его учениками. Результаты этих исследований наиболее полно представлены в монографии, посвященной голоморфным вырожденным группам и полугруппам, а также вырожденным C_0-полугруппам[1]. Необходимо отметить, что результаты, изложенные как в этой монографии, так и в работах других научных школ получены в банаховых пространствах.

Безусловно, понятие квазибанаховых пространств неразрывно связано с понятием банаховых пространств. Однако, в последнее время возник самостоятельный интерес к квазибанаховым пространствам, как к объекту исследова-

[1] *Sviridyuk, G.A.* Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. – Utrecht, Boston: VSP, 2003.

ния, примером этого могут служить работы Н. Кэлтона[2]. Кроме того, такие пространства возникают при исследовании абелевых групп[3] и решении прикладных задач, например в работах Дж.Д. Хардке[4], С.М. Вовка и В.Ф. Борулько[5].

Это побудило начать формирование теории [6] вырожденных разрешающих групп операторов в квазибанаховых пространствах последовательностей с рассмотрением случая относительно ограниченных операторов.

Поэтому актуальной является как необходимость развития этой теории, так и осмысление уравнений соболевского типа в квазисоболевых пространствах. В данной диссертационной работе построена теория вырожденных полугрупп разрешающих эволюционное уравнение соболевского типа вида (1) в квазисоболевых пространствах последовательностей.

Научная новизна полученных результатов:

1. Построена теория относительно секториальных операторов в квазибанаховых пространствах последовательностей. Построены относительные резольвенты, рассмотрены их свойства, построены относительно присоединенные векторы. Доказана теорема о расщеплении пространств, действий операторов в квазисоболевых пространствах в относительно секториальном случае.

2. Доказана теорема о существовании голоморфных разрешающих вырожденных полугрупп операторов в квазибанаховых пространствах последовательностей. Исследованы ядра и образы полугрупп, доказано существования единиц.

3. Полученные результаты теории голоморфных вырожденных полугрупп операторов применены к исследованию разрешимости начальных задач для одного класса вырожденных эволюционных уравнений в квазисоболевых пространствах.

4. Определены многочлены от квазиоператора Лапласа и рассмотрен аналог

[2] *Kalton, N.* Quasi-Banach Spaces / N. Kalton // Handbook of the Geometry of Banach Spaces, Vol. 2, Edit. by W.B. Johnson and J. Lindenstrauss. – Amsterdam etc.: Elsevier, 2003. — P. 1099–1130.

[3] *Берг, Й.* Интерполяционные пространства. Введение / Й. Берг, Й. Лёфстрем. — М.: Мир, 1980.

[4] *Hardtke, J.D.* A Remark on Condensation of Singularities / J.D. Hardtke // Journal of mathematical physics, analysis, Geometry. — 2013. — V. 9, № 4. — P. 448–454.

[5] *Вовк, С.М.* Постановка задач определения линейных параметров сигналов в квазиномированных пространствах / С.М. Вовк, В.Ф. Борулько // Известия высших учебных заведений. Радиоэлектроника. — 2010. — Т. 53, № 7. — С. 31–42.

[6] *Келлер, А.В.* Голоморфные вырожденные группы операторов в квазибанаховых пространствах / А.В. Келлер, Дж.К. Аль-Делфи // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математика. Механика. Физика. – 2015. – Т. 7, № 1. – С. 20–27.

однородной задачи Дирихле в ограниченной области с гладкой границей для линейного уравнения Дзекцера.

5. Исследованы свойства решений одного класса вырожденных эволюционных уравнений в квазибанаховых пространствах последовательностей. Получены условия существования инвариантных пространств и дихотомий решений.

Методы исследования. В данной работе при исследовании вырожденных эволюционных уравнений за основу взят подход, суть которого заключается в построении вырожденных разрешающих полугрупп операторов, дающих классическое решение задачи (2), (3). Особенность разрешающих операторов вырожденного уравнения (2) заключается в том, что они обладают нетривиальными ядрами, содержащими ядро оператора при производной. Для построения теории вырожденных голоморфных полугрупп операторов используются классические методы функционального анализа, теории линейных ограниченных или замкнутых операторов, спектральной теории, "перенесенные"в квазибанаховы пространства последовательностей. Результаты [7] позволяют формализовать понятие сходимости, интегрируемости в этих пространствах и использовать понятие интеграла Римана от аналитической на отрезке функции, а также интегралов Коши по замкнутому контуру и Данфорда по контуру, проходящему через бесконечно удаленную точку, которые определяются как сумма вычетов в изолированных особых точках, лежащих внутри области, ограниченной данными контурами.

Наличие ядер у разрешающих полугрупп обусловило применение метода фазового пространства, заключающегося в том, что оба пространства, в которых действуют операторы из уравнения, представимы в виде прямых сумм ядер и образов разрешающих полугрупп (точнее, их единиц). При этом действия операторов L и M распадается в соответствии с расщеплением пространств, на ядре полугруппы оказывается обратимым сужение оператора M, а на образе – сужение оператора L. Тем самым исходное уравнение (и задача Коши для него) редуцируется к системе двух уравнений (двух задач Коши), заданных на взаимно дополнительных подпространствах. Уравнение на образе невырождено и исследование его разрешимости и свойств его решений проводится классическими методами. Другое уравнение принимает вид

$$H\dot{u}(t) = u(t) + v(t),$$

[7] *Rolewicz, S.* Metric Linear Spaces / S. Rolewicz. — Warsaw: PWN, 1985.

и получить его решение в явном виде и, соответственно, исследовать его свойства позволяет нильпотентность оператора H.

Теоретическая и практическая значимость. Теоретическая значимость исследования заключается в развитии теории эволюционных уравнений соболевского типа, а именно получении ряда обобщающих результатов в квазибанаховых пространствах последовательностей. Это исследование развивает теорию вырожденных (полу)групп операторов, которая неразрывно связана с решением неклассических уравнений математической физики.

Кроме того, получение теоретической базы позволяет не только исследовать неклассические уравнения в квазибанаховых пространствах последовательностей и различные задачи такого рода, но и рассматривать возможность более эффективного решения ряда технических задач. Именно возможность приложения полученных теоретических результатов к различным областям научных исследований позволяет говорить о практической значимости исследования.

Апробация работы.Результаты, изложенные в диссертации, были представлены на Международной конференции "Воронежская зимняя математическая школа" (Воронеж, 2014, 2016), Международной конференции "Дифференциальные уравнения и динамические системы" (Суздаль, 2014), Международной конференции "Спектральные задачи, нелинейный и комплексный анализ"(УФА, 2015), Шестнадцатом всероссийском симпозиуме по прикладной и промышленной математике (Сочи, 2015), Международной научно-практической конференции "Приоритетные научные исследования и разработки" (Саратов, 2016), научных конференциях аспирантов и докторантов ЮУрГУ "Технические науки. Естественные науки. Социально-гуманитарные науки. Экономика. Управление. Право."(Челябинск, 2014, 2015), семинаре "Уравнения соболевского типа" в Южно-Уральском государственном университете.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1 – 7]. Работы [2, 3] опубликованы в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ. В совместных работах [2, 3, 5] научному руководителю принадлежит постановка задачи. Из этих работ в диссертацию вошли только результаты, полученные ее автором.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы. Объем диссертации составляет 111 страниц. Список литературы содержит 93 наименования.

Краткое содержание диссертации

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Введение содержит актуальность и предпосылки исследования, постановку задач и цели работы, представлены историография вопроса, описываются методы исследования, показаны новизна, теоретическая и практическая значимость результатов работы.

Первая глава состоит из пяти параграфов и содержит предварительные сведения и вспомогательные результаты, полученные автором, которые не выносятся на защиту. В **п. 1.1** содержатся определения и понятия квазисоболевых и квазибанаховых пространств последовательностей.

В **п. 1.2** приведено понятие ограниченных и непрерывных операторов в квазибанаховых пространствах последовательностей.

Пусть $\mathfrak{U} = (\mathfrak{U};\ {}_{\mathfrak{U}}\|\cdot\|)$ и $\mathfrak{F} = (\mathfrak{F};\ {}_{\mathfrak{F}}\|\cdot\|)$ — квазибанаховы пространства последовательностей. Линейный оператор $L : \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$ отображающий пространство $\mathfrak{U}$ в пространство $\mathfrak{F}$ называется *непрерывным*, если $\lim\limits_{k\to\infty} Lu_k = L\Big(\lim\limits_{k\to\infty} u_k\Big)$ для любой сходящейся в $\mathfrak{U}$ последовательности $\{u_k\} \subset \mathfrak{U}$ и *ограниченным*, если при любом $u \in \mathfrak{U}$

$$ {}_{\mathfrak{F}}\|Lu\| \leq K\ {}_{\mathfrak{U}}\|u\|, $$

где $K \in \mathbb{R}_+$ не зависит от u.

Теорема 1 (1.2.1)[8] *Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ – квазибанаховы пространства последовательностей. Линейный оператор $L : \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$ такой, что* $\mathrm{dom}L = \mathfrak{U}$, *непрерывен точно тогда, когда он ограничен.*

Множество всех линейных $L : \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$ ограниченных операторов, отображающий квазибанахово пространство $\mathfrak{U}$ в квазибанахово пространство $\mathfrak{F}$, таких что $\mathrm{dom}\ L = \mathfrak{U}$, является линейным пространством, которое обозначим символом $\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$. Оно квазибанахово с квазинормой

$$ {}_{\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})}\|L\| = \sup_{{}_{\mathfrak{U}}\|u\|=1} {}_{\mathfrak{F}}\|Lu\|. $$

Здесь также содержится аналог теоремы Банаха и доказан аналог теоремы Банаха-Штейнгауза.

[8] В скобках указана нумерация в диссертации.

Теорема 2 (1.2.3) *Последовательность* $\{L_k\} \subset \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ *равномерно сходится к оператору* $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ *на некотором линеале* $\overset{\circ}{\mathfrak{U}}$ *плотном в* $\mathfrak{U}$ *точно тогда, когда*

(i) последовательность $\{L_k\}$ *ограничена;*

(ii) последовательность $\{L_k\}$ *сильно сходится к* L *на* $\overset{\circ}{\mathfrak{U}}$ *.*

В **п. 1.3** приводится определение линейных замкнутых операторов и доказываются теоремы, связанные с линейными замкнутыми операторами в квазибанаховых пространствах. Через $\mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ обозначим множество линейных, замкнутых операторов с плотной в $\mathfrak{U}$ областью определения.

В **п. 1.4** рассматриваются функции линейных ограниченных операторов. Здесь вводятся понятия резольвентного множества, спектра линейного непрерывного оператора и резольвента этого оператора, представимая в виде ряда.

Приводится понятие аналитической функции в области $D \subset \mathbb{C}$. Пусть вектор-функция $f(z)$ определена на D и принимает значения в квазибанаховом пространстве последовательностей $\mathfrak{F}$. Если вектор-функция представима сходящимся рядом Лорана в некоторой проколотой окрестности некоторой точки, то *вычетом* функции в этой точке назовем коэффициент c_{-1} лорановского разложения. Классификация изолированных особых точек понимается также, как в теории функций комплексного переменного.

Здесь формализованы понятия интегралов в квазибанаховых пространствах, а именно интеграла Римана от аналитической на отрезке функции, а также интегралов Коши по замкнутому контуру и Данфорда по контуру, проходящему через бесконечно удаленную точку, которые определяются как сумма вычетов в изолированных особых точках, лежащих внутри области, ограниченной данными контурами, умноженная на коэффициент $2\pi i$. Тогда для аналитических вектор-функций справедлива классическая теорема Коши о равенстве нулю интеграла по замкнутому контуру.

В **п. 1.5** построен квазиоператор Лапласа, введены в рассмотрение квазисоболевы пространства и доказаны теоремы об их свойствах. Пусть $\{\lambda_k\} \subset \mathbb{R}_+$ – монотонно возрастающая последовательность такая, что $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k = +\infty$. Построим квазисоболевы пространства

$$\ell_p^m = \left\{ u = \{u_k\} \subset \mathbb{R} : \sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k^{\frac{m}{2}} |u_k| \right)^p < +\infty \right\},$$

где $m \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}_+$. Пространства ℓ_p^m квазибанаховы при всех $m \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}_+$ с квазинормой

$$ {}^m_p\|u\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^{\frac{m}{2}}|u_k|\right)^p\right)^{1/p}, $$

причем они банаховы только если $p \in [1, +\infty)$. Если $p \in (0,1)$, то константа $C = 2^{(1-p)/p}$.

Введем в рассмотрение квазиоператор Лапласа

$$ \Lambda u = \{\lambda_k u_k\} \tag{6} $$

и операторы-многочлены от квазиоператора Лапласа: $P_n(\Lambda)u = \{P_n(\lambda_k)u_k\}$, $n \in \mathbb{N}$. Как нетрудно видеть, оператор $P_n(\Lambda) \in Cl(\ell_q^{m+2s}; \ell_q^m)$, при $s < n$ $\mathrm{dom}\, P_n(\Lambda) = \ell_q^{m+2n}$.

Вторая глава посвящена построению и исследованию свойств вырожденных полугрупп операторов в квазисоболевых пространствах, состоит из шести параграфов. В **п. 2.1** исследованы относительные резольвенты в квазибанаховых пространствах последовательностей и их свойства.

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ – квазибанаховы пространства, операторы $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$, $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$. Рассмотрим L-резольвентное множество $\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}; \mathfrak{U})\}$ и L-спектр $\sigma^L(M) = \mathbb{C} \setminus \rho^L(M)$ оператора M.

Лемма 1 (2.1.1)*Множество $\rho^L(M)$ всегда открыто, и, следовательно, $\sigma^L(M)$ всегда замкнут.*

Пусть $\rho^L(M) \neq \emptyset$, тогда оператор-функции $(\mu L - M)^{-1}$, $R^L_\mu(M) = (\mu L - M)^{-1}L$ и $L^L_\mu(M) = L(\mu L - M)^{-1}$ называются соответственно *L-резольвентой, правой и левой L-резольвентами* оператора M.

Лемма 2 (2.1.3) *Пусть $\lambda, \mu \in \rho^L(M)$, тогда*

(i) $\ker R^L_\lambda(M) = \ker L$, $\quad \mathrm{im} R^L_\lambda(M) = \mathrm{im} R^L_\mu(M)$ *;*

(ii) $\ker L^L_\lambda(M) = \{M\varphi : \varphi \in \ker L \bigcap \mathrm{dom} M\}$, $\quad \mathrm{im} L^L_\lambda(M) = \mathrm{im} L^L_\mu(M)$.

В **п. 2.2** вводится понятие относительно секториального оператора.

Определение 1 Оператор M называется *секториальным относительно* оператора L (короче, *L-секториальным*), если существуют константы $K > 0$, $a \in \mathbb{R}$, $\theta \in (\pi/2, \pi)$ такие, что сектор

$$ S^L_{a,\theta}(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : |\arg(\mu - a)| < \theta, \quad \mu \neq a\} \subset \rho^L(M), \tag{7} $$

причем

$$\max\left\{_{\mathcal{L}(\mathfrak{U})}\left\|R^L_\mu(M)\right\|, _{\mathcal{L}(\mathfrak{F})}\left\|L^L_\mu(M)\right\|\right\} \leq \frac{K}{|\mu - a|} \tag{8}$$

$$\forall \mu \in S^L_{a,\theta}(M).$$

Лемма 3 (2.2.3) *Пусть* $\mathfrak{U} = \ell_q^{m+2n}$, $\mathfrak{F} = \ell_q^m$, $m \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}_+$, $Q_n(\lambda) = \sum_{i=0}^n c_i\lambda^i$ *и* $R_s(\lambda) = \sum_{j=0}^s d_j\lambda^j$ *– многочлены с действительными коэффициентами, степеней* n *и* s *соответственно, причем* $n < s$ *и* $d_s c_n < 0$*, не имеющие общих корней. Положим* $L = Q_n(\Lambda)$, $M = R_s(\Lambda)$*. Тогда оператор* M L*-секториален.*

В **п. 2.3** доказано существование вырожденных голоморфных разрешающих полугрупп для однородных уравнений соболевского типа

$$R^L_\alpha(M)\dot{u} = (\alpha L - M)^{-1}Mu \tag{9}$$

и

$$L^L_\alpha(M)\dot{f} = M(\alpha L - M)^{-1}f \tag{10}$$

при $\alpha \in \rho^L(M)$.

Теорема 3 (2.3.1) *Пусть операторы* L, M *такие, как в лемме 3, причем* $\mathrm{Re}\,\mu_k \equiv \mathrm{Re}\,R_s(\lambda_k)(Q_n(\lambda_k))^{-1} \leq 0$*. Тогда существует аналитическая в секторе* $\{\tau \in \mathbb{C} : |\arg\tau| < \theta - \pi/2, \quad \tau \neq 0\}$*, и равномерно ограниченная разрешающая полугруппа* $\{U^t : t \in \mathbb{R}_+\}$ $(\{F^t : t \in \mathbb{R}_+\})$ *уравнения* (9) ((10)) *и задается интегралами типа Данфорда-Тейлора*

$$U^t = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma R^L_\mu(M)e^{\mu t}d\mu \tag{11}$$

$$(F^t = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma L^L_\mu(M)e^{\mu t}d\mu), \tag{12}$$

где контур Γ *удовлетворяет условию:*

$$\Gamma \subset S^L_\theta(M), \qquad \arg\mu \to \pm\theta \quad \text{при} \quad |\mu| \to \infty. \tag{13}$$

Исследованы ядра и образы построенных разрешающих полугрупп, доказано расщепление пространств $\mathfrak{U} = \ker P \oplus \mathrm{im}P = \ker U^\bullet \oplus \mathrm{im}U^\bullet = \mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1$ $(\mathfrak{F} = \ker Q \oplus \mathrm{im}Q = \ker F^\bullet \oplus \mathrm{im}F^\bullet = \mathfrak{F}^0 \oplus \mathfrak{F}^1)$ и действий операторов $L_k = L\Big|_{\mathfrak{U}^k}$, $\quad M_k = M\Big|_{\mathrm{dom}M_k}$, $\quad \mathrm{dom}M_k = \mathrm{dom}M \cap \mathfrak{U}^k, k = 0, 1.$

П. 2.4 содержит исследование обобщенной задачи Шоуолтера – Сидорова

$$\lim_{t\to 0+} R^L_\alpha(M)(u(t)-u_0)=0, \tag{14}$$

для эволюционного уравнения соболевского типа в квазисоболевых пространствах. Доказана теорема об однозначной разрешимости задачи (9),(14). В **п. 2.5** вводится понятие фазового пространства для эволюционного уравнения соболевского типа в квазисоболевых пространствах.

Определение 2 *Множество* $\mathfrak{P}\subset\mathfrak{V}$ *называется фазовым пространством уравнения* (9), *если*

(i) любое решение $v(t)$ *уравнения* (9) *лежит в* $\mathfrak{P}$, *т.е.* $v(t)\in\mathfrak{P}\quad\forall t\geq 0$*;*

(ii) для любого $v_0\in\mathfrak{P}$ *существует единственное решение задачи* (3),(9).

Доказана теорема о существовании фазового пространства.

Теорема 4 (2.5.1) *Пусть операторы* L, M *такие, как в лемме 3. Множество* $\mathfrak{U}^1=\overline{\mathrm{im}R^L_\mu(M)}=\mathrm{im}U^\bullet$ ($\mathfrak{F}^1=\overline{\mathrm{im}L^L_\mu(M)}=\mathrm{im}F^\bullet$) *является фазовым пространством уравнения* (9) *(*(10)*).*

Кроме того, доказано существование единиц полугрупп. В **п. 2.6** доказано существование обратного оператора $L_1^{-1}\in\mathcal{L}(\mathfrak{F}^1;\mathfrak{U}^1)$.

Третья глава состоит из шести параграфов посвящена изучению эволюционных уравнений соболевского типа в квазисоболевых пространствах и приложению полученных теоретических результатов. В **п. 3.1** исследована задача Коши для неоднородного уравнения соболевского типа в квазисоболевых пространствах последовательностей

$$L\dot{u}=Mu+f. \tag{15}$$

Доказана теорема о существовании единственного решения.

Теорема 5 (3.1.1) *Пусть операторы* L, M *такие, как в лемме 3, вектор-функция* $f:[0,T]\to\mathfrak{F}$ *аналитична. Тогда для любого начального значения*

$$u_0\in\mathcal{P}_f=\{u\in\mathrm{dom}M:(I-P)u=-M_0^{-1}(I-P)f(0)\}$$

существует единственное решение $u\in C^1((0,T],\mathfrak{U})\cap C([0,T],\mathrm{dom}M)$ *задачи* (3), (15), *причем*

$$u(t)=U^t u_0+\int\limits_0^t U^{t-s}L_1^{-1}Qf(s)ds-M_0^{-1}(I-Q)f(t).$$

В **п. 3.2** доказана относительно спектральная теорема в предположении

$$\left.\begin{array}{l} \sigma^L(M) = \sigma_1^L(M) \cup \sigma_2^L(M) \text{ и } \sigma_1^L(M) \text{ не пусто,} \\ \text{существует ограниченная область } \Omega_1 \subset \mathbb{C} \\ \text{ с границей } \gamma_1 \text{ класса } C^1, \text{ такая, что} \\ \Omega_1 \supset \sigma_1^L(M) \quad \text{и} \quad \overline{\Omega}_1 \bigcap \sigma_2^L(M) \text{ пусто.} \end{array}\right\} \tag{16}$$

В **п. 3.3** содержатся сведения об инвариантных пространствах уравнения.

Определение 3 Пусть $\mathfrak{P}$ – фазовое пространство уравнения (9). Подмножество $\mathfrak{J} \subset \mathfrak{P}$ называется *инвариантным пространством* уравнения (9), если при любом $u_0 \in \mathfrak{J}$ решение $u = u(t)$ задачи (3),(9) лежит поточечно в $\mathfrak{J}$ (т.е. $u(t) \in \mathfrak{J}$ для всех $t \in R_+$).

Теорема 6 (3.3.1) *Пусть операторы* $L,\ M$ *такие, как в лемме 3, и выполнено условие* (16), *тогда образ группы*

$$V^t = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} R_\mu^L(M) e^{\mu t} d\mu, t \in R, \tag{17}$$

является инвариантным пространством уравнения (9).

В **п. 3.4** содержится определение экспоненциальных дихотомий решений

Определение 4 Решения уравнения (9) обладают экспоненциальной дихотомией, если

(i) фазовое пространство уравнения (9) представимо в виде $\mathfrak{P} = \mathfrak{J}^1 \oplus \mathfrak{J}^2$, где $\mathfrak{J}^{1(2)}$ – инвариантные пространства уравнения (9);

(ii) при любых $u_0 \in \mathfrak{J}^1$ $(u_0 \in \mathfrak{J}^2)$ решение $u = u(t)$ задачи (3), (9) таково, что ${}_{\mathfrak{U}}\|u(t)\| \leq C_1 e^{-a_1 t}{}_{\mathfrak{U}}\|u_0\|$ $({}_{\mathfrak{U}}\|u(t)\| \geq C_2 e^{a_2 t}{}_{\mathfrak{U}}\|u_0\|)$ при некоторых $a_1, a_2 > 0$ и всех $t \in R_+$.

Теорема 7 (3.4.1) *Пусть операторы* $L,\ M$ *такие, как в лемме 3, существует* $\omega > 0$ *такое, что* $\sigma^L(M) \cap \{\mu \in \mathbb{C} : -\omega \leq \mathrm{Re}\mu \leq \omega\} = \emptyset$ *и множество* $\sigma_+ = \sigma^L(M) \cap \{\mu \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\mu > 0\} \neq \emptyset$. *Тогда уравнение* (9) (*уравнение* (10)) *обладает экспоненциальной дихотомией.*

В **п. 3.5** рассмотрено уравнение Дзекцера

$$(\lambda - \Lambda) u_t = (\alpha\Lambda^2 + \beta\Lambda)u + f, \quad \lambda, \beta \in \mathbb{R}, \ \alpha \in \mathbb{R}_+, \tag{18}$$

в квазисоболевых пространствах $\mathfrak{U}=\ell_q^{m+2}$ и $\mathfrak{F}=\ell_q^m$, $m \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}_+$. Здесь доказано существование единственного решения начальной задачи для него. В **п. 3.6** изучены свойства решений уравнения Дзекцера в квазисоболевых пространствах.

В Заключении представлены выводы о результатах исследования, перспективы и направления дальнейшего развития.

Результаты выносимые на защиту:

1. Теоремы о существовании разрешающих голоморфных вырожденных полугрупп операторов с разработкой теории относительно секториальных операторов в квазисоболевых пространствах.

2. Теорема о существовании фазового пространства однородного эволюционного уравнения в квазисоболевых пространствах.

3. Теоремы о разрешимости задач Коши, Шоуолтера–Сидорова для неоднородного уравнения соболевского типа в квазисоболевых пространствах.

4. Теоремы о существовании инвариантных подпространств и экспоненциальных дихотомий решений для однородных уравнений указанного класса.

5. Теоремы о разрешимости и свойствах решений аналога уравнения Дзекцера в квазисоболевых пространствах.

Публикации автора по теме диссертации

1. *Аль Исави, Дж.К.* Линейные замкнутые операторы в квазибанаховых пространствах / Дж.К. Аль Исави // Материалы международной конференции "Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна-2014". – Воронеж, 2014. – С. 18-21.
2. *Замышляева, А.А.* Голоморфные вырожденные полугруппы операторов и эволюционные уравнения соболевского типа в квазисоболевых пространствах последовательностей / А.А. Замышляева, Дж.К. Аль Исави // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математика, механика, физика. – 2015. – Т. 7, №4. – С. 31-40.
3. *Замышляева, А.А.* On some properties of solutions to one class of evolution Sobolev type mathematical models in quasi-Sobolev spaces / А.А. Замышляева, Дж.К. Аль Исави // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2015. – Т. 8, №4. – С. 113-119.

4. *Al Isawi, D.K.* On Some Properties of Solutions to Dzektser Mathematical Model in Quasi-Sobolev Spaces / D.K. Al Isawi // Journal of Computational and Engineering Mathematics – 2015. – Vol.2, №4. – Pp. 27-36.
5. *Замышляева, А.А.* Об одном классе относительно p-секториальных операторов в квазисоболевых пространствах / Замышляева А.А., Дж.К. Аль Исави // Международная конференция "Спектральные задачи, нелинейный и комплексный анализ". УФА, Россия , 1-3 октября 2015г.: РИЦ БашГУ, 2015. – С. 56-58.
6. *Аль Исави, Дж.К.* Об одном классе эволюционных уравнений соболевского типа в квазисоболевых пространствах последовательностей / Дж.К. Аль Исави // Материалы международной конференции "Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна-2016". — Воронеж, 2016. — С. 47-50.
7. *Аль Исави, Дж.К.* Об инвариантных пространствах и экспоненциальных дихотомиях решений уравнения Дзекцера в квазисоболевых пространствах / Дж.К. Аль Исави // Сборник статей Международной научно-практической конференции "Приоритетные научные исследования и разработки (г. Саратов)". 2016.–Ч.2.–С. 3-4.

Работы [2, 3] опубликованы в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ.